Задания, решения и комментарии
7-8 класс

Страница 1

1. Петя, Вася и Толя хотят установить одинаковый пароль на свои компьютеры – десятизначное число. Они могут пересылать друг другу информацию по электронной почте. Посылать пароль в незашифрованном виде они не хотят, т.к. знают, что почта может просматриваться. Как поступить ребятам?

Указание. Положительно оценивалось любое решение, в котором применялась кодировка, использующая разные коды Пети и Васи, которые может узнать каждый мальчик, зная только свою половину кода. Например, такое.
Решение. Петя придумывает пароль X, прибавляет к X свой секретный код Y, который, кроме него никто не знает, даже Вася и Толя, и отправляет Васе. Вася, получив число X+Y, прибавляет к нему свой секретный код Z и посылает результат обратно Пете. Тот, вычитая из числа X+Y+Z свой секретный код Y и исходное число X, узнаёт секретный код Васи Z, которым Вася и Петя могут воспользоваться, в частности, добавить его к X и послать Васе. Аналогично, Петя сообщает X Толе.

2. 15 гномов подошли к подвесному мосту, способному выдержать не более двух гномов одновременно. По мосту можно идти только с фонарём. Поодиночке они переходят мост в одну сторону за разное время, соответственно за 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5 минут. Когда идут вдвоем, то движутся со скоростью более медленного. Фонарь только один. За какое наименьшее число минут они все смогут переправиться на другую сторону моста? Требуется указать схему переходов и общее время. Обоснование минимальности можно не проводить.

Ответ: 53 мин.
Решение. Схема переходов: (1,2) (1) (5,5) (2) (1,2) (1) (5,5) (2) (1 2) (1) (5,4) (2) (1,2) (1) (4,4) (2) (1,2) (1) (3,4) (2) (3,3) (1) (1 2).

3. Проводится лотерея. Предлагаются три конверта, в которых находятся три суммы денег - X, 2X и 4X рублей. Никакие действия (измерительные и т. п.) совершать с конвертами нельзя. Можно выбрать один конверт, посчитать в нем деньги, после чего сделать выбор — оставить этот конверт или взять другой конверт (при этом первый конверт из игры выбывает). Посмотрев, что лежит в нём, разрешается вместо него взять третий конверт, чтобы получить большую сумму. Ваши действия?

Ответ. Первый конверт надо менять. Пусть в нём было Y рублей. Если во втором 4Y, то менять не надо. Если Y/4, то надо. Если 2Y, то не надо. Если Y/2, то надо.
Решение. Пусть X – меньшая сумма в конвертах.
Если первый конверт не менять, то с вероятностями 1/3 выигрыш составит X, 2X или 4X. То есть, в среднем (X+2X+4X)/3=7X/3.
Если действовать по указанной стратегии, то средний выигрыш будет (4Y+2Y+4X+2X+4X+X)/6=17X/6>7X/3.
Комментарий. В этой задаче могли быть споры относительно реализации исходной ситуации, а именно, каким образом положить деньги в конверты, чтобы исходы X, X/2 и X/4 были равновероятны. При проверке считалось, что эта равновероятность **как-то** достигнута (например, сначала помещают X рублей, а потом разыгрывают, что положить во второй – 4X, 2X или X/2).
Ответ в задаче требовал обоснования.

16	9	12	8
7	15	10	11
13	5	4	1
14	6	2	3

13	4	1	5
7	11	10	15
16	8	12	9
14	2	3	6

Задания, решения и комментарии
7-8 класс

4. Даны две таблицы:
За один ход разрешается переставить в первой таблице два столбца или две строки. Можно ли за несколько ходов получить из первой таблицы вторую? Если нельзя, то разрешается перед началом ходов за 1 рубль поменять местами в первой таблице два числа. Если и в этом случае получить вторую таблицу не удастся, то ещё за 1 рубль можно поменять ещё два числа, и т.д. За какую наименьшую сумму можно решить задачу?

Ответ: за 2 рубля.
Решение. Если 2 числа в первой таблице стоят в одной строке, то после перестановок они останутся в одной строке. То же про столбцы. Легко заметить, что числа 1, 11 надо поместить в разные столбцы, чтобы указанное условие соблюдалось. Кроме того, надо в один столбец поместить числа 3 и 12. За 1 ход и то и другое не сделать. А двух перестановок достаточно. Меняем 1 и 4, затем 2 и 3.
Из новой таблицы вторая получается, например, так:

16	9	12	8
7	15	10	11
13	5	1	4
14	6	3	2

13	5	1	4
7	15	10	11
16	9	12	8
14	6	3	2

13	4	1	5
7	11	10	15
16	8	12	9
14	2	3	6

5. Для каждой из нижеперечисленных шахматных фигур найдите наименьшее количество цветов, в которые надо раскрасить клетки шахматной доски, чтобы никакие две фигуры, поставленные на клетки одинакового цвета, не угрожали друг другу.
А) конь, Б) слон, В) король, Г) ладья.

Ответы: А) 2, Б) 8, В) 4, Г) 8.
Решение.
А) очевидно нужно более 1 цвета, подходит обычная шахматная раскраска в 2 цвета;
Б) главная диагональ требует 8 цветов, подходит раскраска каждой вертикали в свой цвет;
В) в квадратике 2×2 нужны 4 цвета, разбиваем доску на такие квадратики и все красим одинаково в 4 цвета;
Г) одна вертикаль требует 8 цветов, красим первую вертикаль в 8 цветов, остальные получаем из первой циклическими сдвигами.
Комментарий. Ответ в задаче требовал обоснования.

6. В энциклопедии выдающихся учёных указаны в алфавитном порядке фамилии живших ранее учёных. После каждой фамилии указаны годы жизни этого учёного, например,
Гаусс 1777 1885
Нейман 1903 1957
Пифагор -570 -490 (Отрицательные числа означают даты до нашей эры.)
Требуется описать алгоритм, определяющий год, в котором жило наибольшее число выдающихся учёных.

Решение. Упорядочим все даты (и рождения и смерти) по возрастанию и занесём их в одну таблицу, причем дату рождения пометим красным цветом, а дату смерти - чёрным. Если какие-то даты совпадают, то сначала укажем красные даты, а потом чёрные. Заведём счётчик S, сначала нулевой. Просматривая упорядоченный массив дат слева направо, изменяем S – при встрече красной даты прибавляем к S единицу, при встрече чёрной – уменьшаем S на 1. Максимальное значение S – это ответ.
Комментарий. Неэффективные алгоритмы, например, полный перебор оценивались значительно ниже.