Код успеха-2022

Указания по решениям и критерии оценки.

Все задачи оцениваются из 5 баллов

Основаниями для снижения балла – неполное обоснование или неэффективный алгоритм.

7-8 кл.

1. *Юра "считает" дни недели следующим образом: понедельник – один, вторник – два, среда – три, четверг – четыре, пятница – пять, суббота – шесть, воскресенье – семь. Далее он меняет направление, суббота – восемь, пятница – девять, четверг – десять, среда – одиннадцать, вторник – двенадцать, понедельник – тринадцать. Далее опять меняет направление, вторник – четырнадцать, и т.д. На каком дне недели Юра назовёт заданное число n?*

Решение. Продолжив счёт (см. ниже), легко убедиться, что дни недели повторяются с периодом 12, т.е. числа вида $12k+1$ попадают на понедельник, вида $12k+2$ – на вторник, $12k+3$ – на среду, и т.д. Таким образом, ответ приведён в таблице над числом n mod 12. (Не забываем, что 12 mod 12 = 0.)

пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс	сб	пт	чт	ср	вт	пн	вт	…					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14						

2. *На клетчатой $n \times m$ доске стоят ладьи. Опишите алгоритм окраски этих ладей в наименьшее возможное количество цветов, чтобы одинаково покрашенные ладьи не били друг друга (ладьи бьют по шахматным правилам).*

Решение. Заметим, что трёх цветов всегда хватает. В самом деле, начнём красить ладьи с верхней горизонтали слева направо, каждый раз используя цвет с наименьшим номером от 1 до 3, с которым данная ладья не конфликтует. Т.к. покрашены ладьи, находящиеся сверху и левее данной, то конфликтов не более двух, и какой-то цвет из трёх может быть использован. Итак, описан алгоритм, использующий три цвета. Может оказаться, что хватает и меньшего количества цветов. Для этого сначала в этом надо убедиться. Если никакие две ладьи не бьют друг друга, то достаточно одного цвета. Чтобы убедиться, что хватает или не хватает двух цветов, можно попытаться начать покраску в два цвета. Для этого красим любую ладью в первый цвет. Ладьи, которые её бьют, во второй. Которые бьют её – опять в первый, и т.д. Если все ладьи оказались покрашены, то заканчиваем, иначе, опять красим какую-то ещё неокрашенную в первый цвет, и повторяем процесс от неё. Если вдруг окажется, что ладья, которая должна быть окрашена в первый или второй цвет, бьётся ранее покрашенной ладьёй этого цвета, то покраска в два цвета невозможна.

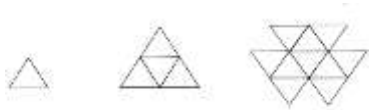
3. *В школьном автобусе едут m мальчиков и n девочек. На каждой остановке два школьника выходят и один входит, причём, если выходят два школьника одного пола, то входит мальчик, а если разных, то входит девочка. Кто последний останется в автобусе – мальчик или девочка?*

Решение. Заметим, что после каждой остановки чётность количества мальчиков изменяется. До момента, когда в автобусе останется 1 школьник произойдёт $m+n-1$ остановка, т.е. чётность количество мальчиков сменится столько раз. Итак, учитывая, что вначале их было m, последним будет мальчик, если $n-1$ – нечётно, т.е. n – чётно. Иначе, последней окажется девочка.

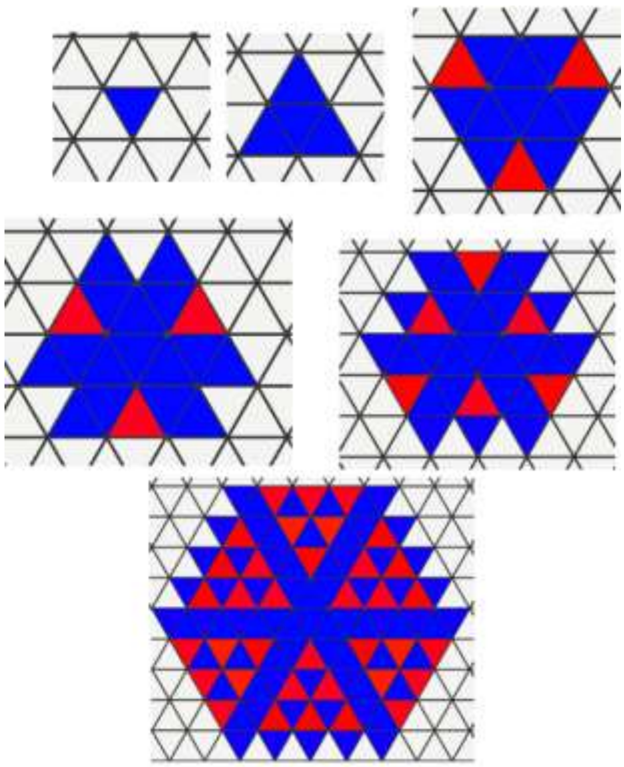
4. В доску вбиты гвоздики, образующие n вертикальных рядов. В первом ряду один гвоздик, во втором – 2, в третьем – 3, и т.д. Некоторые пары гвоздиков надо соединить проводками, соблюдая следующие правила:
А. Каждую пару гвоздиков можно соединять не более, чем одним проводком.
Б. От каждого гвоздика в K-ом ряду должно отходить ровно K проводков.
Опишите алгоритм, определяющий, можно ли это сделать и, если можно, то как.

Решение. Соединим в каждом ряду каждый гвоздик с каждым. Останется добавить по одному проводку к каждому гвоздику. Это можно сделать, если общее число гвоздиков чётно. Разобьём гвоздики на пары следующим образом. Сначала каждый гвоздик последнего ряда с гвоздиком из предыдущего ряда. Оставшийся без пары гвоздик соединим с гвоздиком предпредыдущего ряда. Продолжаем этот процесс с последнего неразбитого на пары ряда гвоздиков. Разбиение закончится корректно. Это обеспечивается чётностью числа гвоздиков. В каждой паре добавим один проводок.

5. *Юра рисует на доске правильные треугольники. На первом шаге – один. На втором шаге к каждой стороне пририсовывает ещё по одному треугольнику, на третьем – ещё по одному, и т.д. На рисунке показаны картинки, получившиеся после первого, второго и третьего шагов. Сколько треугольников, равных исходному, окажется нарисовано после n-го шага и какая длина периметра получившейся фигуры?*



Ответ. Количество треугольничков*: 1 + 3(n*(n-1)/2).* Периметр: *3*(floor((n-1)/2)*2 + floor((n+2)/2)).*



Решение.

Заметим что каждый новый треугольничек либо касается фигуры одной стороной, либо двумя.

Если новый треугольничек касается фигуры одной стороной, раскрасим его в синий цвет.

Если новый треугольник касается фигуры двумя сторонами, раскрасим его в красный цвет.

Рассмотрим сколько красных и синих треугольников будет прибавляться после каждого шага.

Получим последовательность: (0к,3с),(0к,6с),(3к,6с),(3к,9с),(6к,9с),(6к,12с)…

Количество синих треугольников, прибавляемых на каждом шаге = 3**floor((n+2)/2)* (floor – округление вниз)

Количество красных треугольников, прибавляемых на каждом шаге = 3*floor((n-1)/2) (floor – округление вниз). Действительно, каждый синий треугольник, добавленный на шаге n, через 3 шага коснется вершиной красный. (поэтому число добавленных красных треугольников равно числу добавленных синих треугольников 3 шага назад)

Заметим, что если к фигуре можно добавить r красных и b синих треугольников, значит её периметр составляет r*2+b. (Красные треугольники «используют» 2 ребра, синие одно). Отсюда формула периметра.

Заметим, что каждый раз к треугольнику добавляется на три треугольника больше, чем в прошлый раз. Количество треугольников на шаге n это сумма арифметической прогрессии.