Решение задач

1. Петя и Волк играют в обычные крестики-нолики на поле 3х3, делая ходы по очереди. Петя поставил крестик в угол, Волк поставил нолик в другой угол. Может ли Петя гарантированно выиграть, т.е. поставить три крестика в ряд по горизонтали, вертикали или диагонали? (4 балла)
Чтобы выиграть, Пете надо поставить крестик в третий угол. Волк должен поставить нолик между Петиными крестиками, иначе он проиграет на следующем ходу. А Пете надо поставить крестик в четвёртый угол! После этого для Волка возникает две угрозы одновременно, и справиться с ними за один ход невозможно.

2. Волк загадал двузначное натуральное число, а Петя пытается его отгадать. Он задаёт Волку вопросы, на которые тот даёт ответы ДА или НЕТ.
А) за возможно меньшее число вопросов помогите Пете определить загаданное число? (3 балла)
Петя может отгадать задуманное Волком число за 7 вопросов. Сначала зона поиска – это числа от 11 до 99.
Первый вопрос: **число меньше 55?**
При ответе ДА остаётся искать задуманное число на отрезке от 10 до 54. При ответе НЕТ надо искать задуманное число на отрезке от 55 до 99. Зона поиска сократилась в 2 раза.
Следующий вопрос должен быть таким, чтобы после ответа на него зона поиска опять сократилась в 2 раза. Это легко сделать, спрашивая: задуманное число меньше числа, которое стоит в середине зоны поиска? При любом ответе зона поиска сократиться до 22 или 23 чисел.
После ответа на аналогичный третий вопрос – до 11 или 12 чисел.
Четвёртый вопрос – до 5 или 6 чисел.
Пятый – до 2 или 3.
Шестой – до 1 или 2.
Седьмой ответ укажет на задуманное число. Такой метод поиска называется методом половинного деления или методом бинарного поиска.
Б) тот же вопрос, но при условии, что среди первых четырёх ответов Волка есть один неправильный. (6 баллов)
Это чуть более сложная задача. В случае неправильного ответа на первые вопросы Петя может продолжить поиск не там, где находится задуманное число и ничего не найти. Поэтому можно предложить, хотя и похожий по идее, но другой путь. Петя может предложить Волку перевести его число в двоичную систему счисления. Любое двузначное число представляется двоичным числом от 1010 (это число 10 в обычной десятичной системе) до 1100100 (это число 99). За первые 7 вопросов Петя может выяснить, какая

цифра стоит сначала в младшем, потом в следующем и т.д. разрядах загаданного числа. Вопрос может выглядеть так: «стоит ли в этом разряде 1?» После этого он может за два вопроса узнать, в каком из вопросов Волк солгал. Для этого он может спросить, солгал ли Волк в первых двух ответах на вопрос. После ответа ДА и после ответа НЕТ остаётся ровно две возможности для поиска ложного ответа. Ясно, что определить это можно за один вопрос. А зная, где Волк солгал, Петя может заменить в соответствующем разряде двоичного числа 0 на 1 (или 1 на 0) и узнать загаданное число в двоичной системе счисления.

3. Петя загадал слово, а потом каждую букву этого слова сдвинул по алфавиту на одно и то же число позиций, некоторые буквы влево, некоторые – вправо. У него получилось: НИПУХСЕНДПЕ. Что за слово загадал Петя? (4 балла)

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

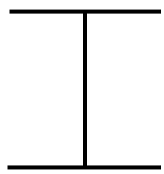
Это слово: **ИНФОРМАТИКА**. Все буквы сдвинуты на 5 позиций по алфавиту.

4. Петя заявил, что два числа 10001 и 1010010 - это одно и то же число, но записанное в разных системах счисления. Мог ли Петя быть прав? (5 баллов)

Да. Это число 82 в троичной и двоичной системах соответственно.

5. Дома пяти друзей находятся в центре и углах квадрата 200х200 метров. Они решили протянуть между своими домами провода, соединяющие в сеть свои компьютеры.

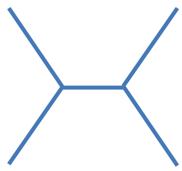
А) Какая наименьшая суммарная длина провода у них должна быть, если провод можно проводить только параллельно сторонам квадрата? (4 балла)



600 м. От центра обязательно надо провести провод до стороны. Это 200 м. Остальная сеть восстанавливается практически однозначно.

Б) Можно ли обойтись менее, чем 560 м провода, если провод можно проводить не только параллельно сторонам квадрата? (8 баллов)

Провод разрешается разрезать и разветвлять в любых местах.



Да. Например, как указано на схеме. Концы четырёх отрезков – это вершины квадрата. Длина отрезка, походящего через центр, 100 м. Применяя теорему Пифагора, можно убедиться, что общая длина проводов равна $200\sqrt{5}+100\approx547$ м

6. Всем известна компьютерная игра «Сапёр». В некоторых клетках игрового поля установлены мины, а в открытых свободных от мин клетках указано количество мин, находящихся рядом, т.е. в соседних клетках. Соседними считаются клетки, имеющие с данной общую сторону или угол. На поле 6×6 открыты все клетки. Оказалось, что во всех свободных клетках указано одно и то же число. Каким может быть это число? Известно, что хотя бы одна клетка на поле – свободна от мин.
(За каждый ответ с примером – по 2 балла)
Вот примеры расстановки мин (клетки с минами закрашены), при которых во всех свободных клетках стоит одно и то же число:

1	1	1	1	1	1
1		1	1		1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1		1	1		1
1	1	1	1	1	1

3					

	4				
4					

	5	5			
	5	5			

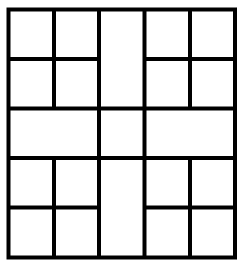
		6	6		
	6			6	
	6			6	
		6	6		

	7	7			

	8				

Число 2 в свободных клетках получить не удаётся. Это можно показать перебором.

7. Схема дорог квадратного микрорайона приведена на рисунке. Петя живёт в левом нижнем углу, а школа находится в правом верхнем углу. Сторона микрорайона равна 500 м. Сколько различных путей длиной 1 км ведут от школы до дома? (6 баллов)



Сначала заметим, что все пути от дома Пети до школы длиной 1 км могут идти только слева направо или снизу вверх.
Отметим около каждого перекрёстка количество дорог, ведущих к нему от дома Пети. Вдоль нижней дороги, а также вдоль левой дороги путь один, поэтому здесь будут написаны единицы. К остальным перекрёсткам ведут пути и слева и снизу, значит, числа около них должны быть равны количеству путей слева плюс количеству путей снизу. А эти числа уже подсчитаны. Таким образом, все числа можно получить, двигаясь снизу-вверх, слева-направо и складывая числа, находящиеся по дорожкам снизу и слева.

1	3	12	35	81	162
1	2	9	23	46	81
1	1	7	14	23	35

1	3	6	7	7	12
1	2	3	1	2	3
	1	1	1	1	1

Ответ: 162.

8. Петя сконструировал вычислительную машину, в которую можно ввести два числа X и Y, а она подсчитает число, равное 1-X/Y. Новых чисел в машину вводить нельзя, но полученные результаты могут участвовать в дальнейших вычислениях. Как от такой машины добиться, чтобы она нашла следующие числа:

А) X·Y (3 балла)

Б) X-Y (3 балла)

В) X/Y (3 балла)

Г) X+Y (3 балла) ?

Вот последовательность действий, при которых получаются все нужные числа (справа – комментарии, в которых указываются значения получившихся чисел):

Ввести X,Y

F= 1-X/Y	теперь в машине есть числа X, Y, F= 1-X/Y и их можно использовать в дальнейших вычислениях
H= 1-Y/X	
Z=1-X/X	Z=0
E=1-Z/X	E=1
A=1-E/X	A=1-1/X
B=1-A/E	B=1-1+1/X=1/X
C=1-Y/B	C=1-Y×X
M=1-C/E	P=1-1+Y×X=X×Y – получено произведение M
G=1-H/B	G=1-(1-Y/X)/B=1-(1-Y/X)×X =1-X+Y
D=1-G/E	t=1-1+X-Y=X-Y – получена разность D
P=1-F/E	P=1-1+X/Y=X/Y получено частное P
K=1-Y/E	K=1-Y
L=1-X/K	L=1-X/(1-Y)
M=1-E/K	y=1-1/(1-Y)
N=1-1/E	N=1-1+1/(1-Y)=1/(1-Y)
S=1-L/N	S=1-(1-X/(1-Y))*(1-Y)=1-(1-b-a)=a+b – получена сумма S