

## Теоретические задачи для младшей группы. Указания и краткие решения.

*В перечисленных ниже задачах надо что-то сделать. Требуется разработать алгоритм, который достигает цели за возможно меньшее количество действий. Если вы сможете предъявить ответ вообще без каких-либо действий, а только вычисляющий значение по какой-либо формуле, – это самый лучший вариант. Любой из способов требуется обосновать. Без обоснования оценка за задачу снижается.*

### 1. Рассчитайте, какую территорию захватит конь.

Шахматного коня поставили на клетку бесконечной клетчатой доски. Ему разрешили сделать ровно  $N$  ходов. На скольких разных клетках он может оказаться после этих ходов? Например, при  $N=1$  количество таких клеток равно 8. Опишите алгоритм, отвечающий на этот вопрос.

*Комментарий.* Задача кажется искусственной, однако, при различных правилах «передвижения коня» похожие модели используются при моделировании распространения лесных пожаров, инфекционных заболеваний и т.п.

#### **Решение.**

Для  $N=1$  ответ 8. Для  $N=2$  ответ 33. В этом можно убедиться непосредственно. При больших значениях  $N$  конь может добраться до любой клетки квадрата  $(4N+1) \times (4N+1)$ , двигаясь из центральной клетки, того цвета, который соответствует чётности хода, кроме четырёх угловых клеток. Таким образом, при  $N > 2$  ответ равен  $((4N+1) \times (4N+1) - 1) / 2$  при нечётных  $N$ , либо  $((4N+1) \times (4N+1) + 1) / 2 - 4$  при чётных  $N$ .

### 2. Помогите строевому генералу.

100 новобранцев выстроили перед генералом в каре – квадрат  $10 \times 10$ . Все новобранцы разного роста. Генерал может отдавать команды двух видов: переставить местами две шеренги (шеренга – это 10 человек, стоящих в ряду по горизонтали) или переставить местами две колонны (колонна – это 10 человек, стоящих в ряду по вертикали). Генерал хочет, чтобы в левом вертикальном ряду самым первым стоял самый высокий новобранец, следующим в этом же ряду – самый высокий из оставшихся, которого можно туда поставить, затем, по такому же принципу, следующий самый высокий, которого можно туда поставить и т.д. После первого вертикального ряда этот же принцип должен сохраняться и в следующих по порядку рядах. Зная, какого роста стоят новобранцы вначале, определите, кто из них окажется в правом нижнем углу.

**Решение.** Заметим, что любые два солдата, стоящие в одном столбце, при любом действии генерала в одном столбце и останутся. То же относится и к солдатам, стоящим в одной строке. Значит, в левом нижнем углу строя окажется самый низкий солдат (пусть  $X$ ) из столбца, где стоит самый высокий солдат, а в правом верхнем – самый низкий солдат (пусть  $Y$ ) из строки, где стоит самый высокий солдат. А солдат, стоящий с  $X$  в одной строке, а с  $Y$  – в одном столбце, будет стоять в правом нижнем углу.

### 3. Помогите юному программисту.

Учитель задал начинающим программистам такое задание: написать программу, которая вводит два числа, что-то делает, а в конце – выводит два числа. Программа обязательно должна иметь следующую структуру:

ВВОД ( $X$ ,  $Y$ )

ЦИКЛ ПОКА УСЛОВИЕ

КАКИЕ-ТО ДЕЙСТВИЯ

КОНЕЦ ЦИКЛА

ВЫВОД (X, Y)

**УСЛОВИЕ** и **КАКИЕ-ТО ДЕЙСТВИЯ** школьники должны написать сами. Главное требование – на выводе числа должны появиться в порядке, противоположном тому, в каком он поступили на входе.

Сможете ли вы выполнить задание учителя?

**Ответ:** выполнить требование учителя невозможно. **Решение.** По окончании цикла переменные X и Y должны идти в некотором порядке (обратном исходному). Но, если ввести их сразу в этом порядке, цикл не будет выполняться вообще. Для преодоления этого противоречия можно применить некоторые хитрости, к сожалению, непредусмотренные условиями, например, использовать переменные до выполнения цикла, или обрывать цикл раньше времени (в некоторых языках программирования такая возможность есть, но в том языке (это школьный алгоритмический язык), который приведён, нет. При этом программа работает не по указанной схеме.

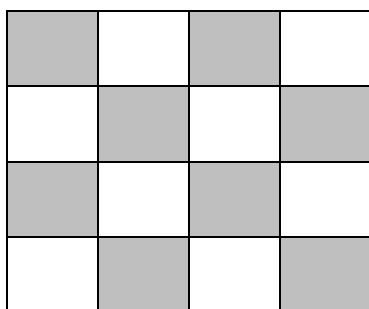
#### 4. Помогите криминалисту.

В ряд лежат 8 алмазов. Криминалист знает, что весить они должны 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12 карат, но не знает, какой – сколько. Также он знает, что один из алмазов подменили на более лёгкий. Как криминалист, имея чашечные весы без гирь сможет за наименьшее число взвешиваний определить фальшивый алмаз?

**Решение.** Чтобы взвешивания дали информативный результат, надо знать, сколько карат должен весить тот или иной алмаз. На это может ответить сортировка алмазов по весу. Но, сортировка чисел без какой-либо дополнительной информации об этих числах требует 17 сравнений, если применять самый экономный алгоритм слиянием. А с дополнительной информацией, указанной в условии, чуть меньшего количества сравнений. Использовать эту информацию можно, заметив, что  $5+6=11$ , поэтому найдя два самых лёгких алмаза за 9 взвешиваний, отсортировать тяжёлые алмазы можно немного быстрее, сравнивая претендующие на роль 11-каратного алмаза с алмазами 5+6, взятыми вместе.

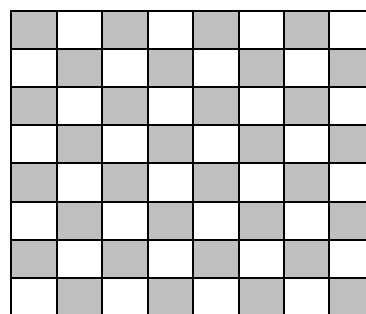
#### 5. Исправьте ошибку строителей

При настилке паркета в квадратной комнате строители допустили ошибку – вместо чёрных и белых квадратов размера 1 дм × 1 дм они постелили квадраты 2 дм × 2 дм. В



результате, пол в комнате стал выглядеть так (левый рисунок), вместо того, чтобы выглядеть так (правый рисунок).

В вашем распоряжении есть нож, который режет весь паркет от края комнаты до



края. После того, как все разрезы сделаны, отдельные куски можно перекладывать. Исправьте ошибку строителей за возможно меньшее число разрезов.

**Решение.** Достаточно сделать 4 горизонтальных и 4 вертикальных разреза, разделив каждый двойной квадрат на 4 маленьких квадрата. Дальнейшие перекладывания очевидны. Меньшим количеством разрезов обойтись не удастся, т.к. через центр каждого двойного квадрата, лежащего по диагонали, по крайней мере, два разреза должны пройти.

#### 6. Помогите кому-нибудь из мальчиков выиграть.

Пётр и Вова по очереди переставляют две рядом стоящие цифры в написанном на доске числе. Сначала на доске написано число 12345. Начинает Пётр. Запрещено получать

число, которое на доске уже было. Кто не сможет сделать ход – проиграл. Кто из мальчиков может обеспечить себе победу, и как он для этого должен играть?

**Ответ.** Выигрывает Петя. Для этого ему достаточно всё время переставлять первую и вторую цифры. Доказательство. Мысленно разобьём все возможные числа на пары: (хузtr, ухztr). После хода Пети Вова должен получить число из другой пары, а Петя, сделав свой ход, получит число из этой же пары. Вова опять должен менять пару, а Петя – нет. Когда пары закончатся, Вова проиграет.

### **7. Восстановите содержимое памяти.**

В компьютере «Five5» каждая ячейка состоит ровно из пяти бит, каждый из которых может быть в состоянии 0 или 1. Вам дано задание восстановить состояние одной из ячеек. Для этого можно воспользоваться следующим действием: предъявить какое-нибудь пятизначное двоичное число от 00000 до 11111, и вам будет дан ответ – в скольких разрядах предъявленное число совпадает с состоянием интересующей вас ячейки. Как можно выполнить задание за возможно меньшее число действий?

**Решение.** За 5 действий выполнить задание легко, но можно и за 4. Вот последовательность предъявляемых чисел: 00000, 11100, 01110, 00101. Можете убедиться, что на каждом из 32 вариантах состояния ячейки наборы ответов различны.